Concours Blanc de Mathématiques – MPSI

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées

Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ±1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Problème d'Analyse – Fonction $t \mapsto t^{-1} \arctan t$ et sa primitive

Dans ce problème, on pourra utiliser sans justification le résultat suivant : pour tous réels a, b et pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Les parties C et D sont indépendantes, mais utilisent les résultats des parties A et B.

Partie A : analyse de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $t \neq 0$ par $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$

1) Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.

b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
Note : on peut répondre à cette question en "admettant" les résultats des questions précédentes.

c) Donner un équivalent de $f(t) - f(0)$ lorsque t tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la courbe de f en 0 ?

3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \neq 0$, calculer $f'(t)$.

4) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

5) En déduire le tableau de variations de f. Vérifier que f admet un maximum global en 0.

Partie B : analyse de φ

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) dt$.

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, de sorte que pour tout $x \neq 0$, on a $\varphi(x) = \dfrac{F(x)}{x}$.

6) Montrer que φ est paire et continue sur $\mathbb{R}^*$.

7) Montrer que φ est continue et dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$.

8) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq \displaystyle\int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

9) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.
Indication : on pourra commencer par supposer $x > 0$.

10) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$.

11) Dresser le tableau de variations de φ.

Partie C : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x^2y' + xy = \arctan x.$

12) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

13) Soit y une solution (en supposant qu'elle existe) de (E). Que vaut $y(0)$?

14) Montrer que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Partie D : une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ donné, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

15) **a)** Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\left|\varphi'(x)\right| \leq \frac{1}{x}\left(1 - f(x)\right) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|\varphi'(x)\right| \leq \dfrac{1}{4}$.

16) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Montrer que $0 < \alpha \leq 1$.

17) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$. En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Problème d'Algèbre – Polynômes annulateurs de matrices

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n désigne un entier naturel non nul, et $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{K})$. Enfin, A désigne une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $A^m = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{m \text{ fois}}$, avec la convention $A^0 = I_n$. Par ailleurs, à tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on peut associer une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, qu'on note $P(A)$, définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$$

Par exemple, avec $P = X^3 - 4X + 2$, alors $P(A) = A^3 - 4A + 2I_n$. Dans ce contexte, on dit qu'un polynôme P est <u>annulateur</u> de A si $P(A) = 0_n$.

Partie I : Exemples de polynômes annulateurs

On peut remarquer que le polynôme nul $P = 0$ est toujours un polynôme annulateur de A.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P = X^2 - 4$ est un polynôme annulateur de A.

2) Dans cette question, on s'efforcera d'allier concision et précision. Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer un polynôme annulateur de A qui ne soit pas le polynôme nul :

a) $A = I_n$

b) $A = 0_n$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, où p est un projecteur de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Partie II : Existence d'un polynôme annulateur non nul

3) Donner (sans démonstration) la dimension de $M_n(\mathbb{K})$. Pour $n = 2$, donner également la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

4) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ est liée. On précisera une valeur de m qui ne dépend pas de A.

5) En déduire l'existence d'un polynôme annulateur de A non nul.

Partie III : Ensemble des polynômes annulateurs

On pourra utiliser sans démonstration les propriétés suivantes : pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
- $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$
- $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A) = (QP)(A)$

Étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note N_A l'ensemble des polynômes annulateurs de A, c'est-à-dire

$$N_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_n\}$$

6) Montrer que N_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

7) Montrer que si $P \in N_A$ et si $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $PQ \in N_A$. Est-ce que N_A est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$?

8) Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Montrer que $N_{BAB^{-1}} = N_A$.

Partie IV : Polynôme annulateur minimal

Pour tout polynôme P, on note $P\mathbb{K}[X] := \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$: c'est donc l'ensemble des multiples de P. L'objectif de cette partie est de montrer que, étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe un unique polynôme unitaire noté Γ (qui dépend de A) dans $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$N_A = \Gamma\mathbb{K}[X]$$

9) On note D l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs *non nuls* de A, donc :

$$D = \{\deg P \mid P \in N_A \text{ et } P \neq 0\}$$

Justifier que D admet un minimum, qu'on notera d.

10) **a)** Soit $U, V \in N_A$ de degrés d. En utilisant une division euclidienne, montrer que $V \mid U$.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré d dans N_A, qu'on notera Γ.

11) **a)** Soit $P \in N_A$. Montrer que $\Gamma \mid P$.

b) Montrer que $N_A = \Gamma\mathbb{K}[X]$.

Partie V : Propriétés diverses du polynôme minimal

On rappelle que $d = \deg \Gamma$ (où Γ est le polynôme vu en section précédente). On pose $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui s'écrivent $P(A)$ pour un polynôme P, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_A = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

12) Justifier que $d \geq 1$.

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes.

13) **a)** Montrer que $\mathcal{P}_A$ est un s.e.v de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = T(A)$ et $\deg T < d$.

c) En déduire la dimension de $\mathcal{P}_A$.
Indication : on pourra utiliser l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_{d-1}[X] &\to \mathcal{P}_A \\ P &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

14) Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que $\Gamma = (X-2)(X-3)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^m par Γ. En déduire une expression de A^m en fonction de m, I_n et A (mais pas A^2, A^3, etc.).

15) On pose $\Gamma = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{K}$. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si A est inversible et que dans ce cas, on a $A^{-1} \in \mathcal{P}_A$.

16) On suppose qu'une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ admet pour polynôme minimal $\Lambda \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si Γ et Λ sont premiers entre eux, alors $N_A + N_B = \mathbb{K}[X]$.